

## CAPÍTULO 2

# Determinantes

### 1. Función determinante

A lo largo del capítulo,  $K$  representará un cuerpo y  $n$  un entero positivo.

**Definición 1.1.** Sea  $F : M_{n \times 1}(K) \times \dots \times M_{n \times 1}(K) \longrightarrow K$  una aplicación, diremos que  $F$  es:

$$\blacksquare \text{ } n\text{-lineal, si: } \begin{cases} F(c_1, \dots, \alpha c_j, \dots, c_n) = \alpha F(c_1, \dots, c_j, \dots, c_n) \\ F(c_1, \dots, c_j + c'_j, \dots, c_n) = F(c_1, \dots, c_j, \dots, c_n) + F(c_1, \dots, c'_j, \dots, c_n) \end{cases}$$

para  $1 \leq j \leq n$ ,  $c_1, \dots, c_j, c'_j, \dots, c_n \in M_{n \times 1}(K)$  y  $\alpha \in K$ .

- *alternada*, si  $F(c_1, \dots, c_n) = 0$  siempre que al menos dos componentes de la  $n$ -tupla  $(c_1, \dots, c_n)$  coincidan, es decir, si existen  $i, j$ , con  $1 \leq i \neq j \leq n$ , de manera que  $c_i = c_j$ .

**Consecuencias 1.2.** Sea  $F : M_{n \times 1}(K) \times \dots \times M_{n \times 1}(K) \longrightarrow K$  una aplicación  $n$ -lineal alternada, y sea  $(c_1, \dots, c_n) \in M_{n \times 1}(K) \times \dots \times M_{n \times 1}(K)$ , entonces se tiene:

- 1) Si para algún  $i$ , con  $1 \leq i \leq n$ , se verifica que  $c_i = O \in M_{n \times 1}(K)$ , entonces  $F(c_1, \dots, c_n) = 0$ .
- 2) Si  $i \neq j$ , con  $1 \leq i, j \leq n$ , se verifica:

$$F(c_1, \dots, c_i, \dots, c_j, \dots, c_n) = -F(c_1, \dots, c_j, \dots, c_i, \dots, c_n)$$

DEMOSTRACIÓN.

- 1) Si  $c_i = O$ , entonces:

$$c_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot c_i$$

Por consiguiente, de la  $n$ -linealidad de  $F$ , se tiene:

$$F(c_1, \dots, c_i, \dots, c_n) = F(c_1, \dots, 0c_i, \dots, c_n) = 0F(c_1, \dots, c_i, \dots, c_n) = 0$$

2) Por ser  $F$   $n$ -lineal y alternada, se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= F(c_1, \dots, c_i + c_j, \dots, c_i + c_j, \dots, c_n) = F(c_1, \dots, c_i, \dots, c_i, \dots, c_n) + \\ &+ F(c_1, \dots, c_i, \dots, c_j, \dots, c_n) + F(c_1, \dots, c_j, \dots, c_i, \dots, c_n) + F(c_1, \dots, c_j, \dots, c_j, \dots, c_n) = \\ &= F(c_1, \dots, c_i, \dots, c_j, \dots, c_n) + F(c_1, \dots, c_j, \dots, c_i, \dots, c_n) \end{aligned}$$

de donde se tiene:

$$F(c_1, \dots, c_i, \dots, c_j, \dots, c_n) = -F(c_1, \dots, c_j, \dots, c_i, \dots, c_n)$$

□

**Definición 1.3.** Una *función determinante* en  $M_n(K)$  es una aplicación  $D : M_n(K) \longrightarrow K$ , que verifica las condiciones siguientes:

- 1)  $D(I_n) = 1$ .
- 2)  $F_D$  es  $n$ -lineal y alternada, siendo  $F_D : M_{n \times 1}(K) \times \dots \times M_{n \times 1}(K) \longrightarrow K$  la aplicación definida según  $F_D(c_1, \dots, c_n) = D(A)$ , donde  $A$  es la matriz de  $M_n(K)$  cuyas columnas están formadas por los términos de las matrices  $c_j$  de  $M_{n \times 1}(K)$ , es decir:

$$F_D\left(\begin{bmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^n \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^n \end{bmatrix}\right) = D\left(\begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{bmatrix}\right)$$

**Consecuencias 1.4.** Si  $D$  es una función determinante en  $M_n(K)$ , entonces:

- 1) Si  $A \in M_n(K)$  y  $B$  es la matriz que resulta de multiplicar la columna  $s$ -ésima de  $A$  por el escalar  $a \in K$ , para algún  $s$ , con  $1 \leq s \leq n$ , entonces  $D(B) = a D(A)$ .
- 2) Si  $A, A' \in M_n(K)$  tienen las mismas columnas excepto la columna  $s$ -ésima, para algún  $s$ , con  $1 \leq s \leq n$ , y  $B \in M_n(K)$  es la matriz que tiene las mismas columnas que  $A$  y  $A'$ , excepto la columna  $s$ -ésima que es suma de la correspondiente de  $A$  y la de  $A'$ , entonces  $D(B) = D(A) + D(A')$ .
- 3) Si  $A \in M_n(K)$  y existen  $r, s$ , con  $1 \leq r \neq s \leq n$ , de manera que las columna  $r$ -ésima y  $s$ -ésima de  $A$  coinciden, entonces  $D(A) = 0$ .
- 4) Si  $A \in M_n(K)$  tiene alguna columna formada toda por ceros, entonces  $D(A) = 0$ .
- 5) Si  $A \in M_n(K)$  y  $B$  es la matriz que resulta de permutar en  $A$  las columnas  $r$ -ésima y  $s$ -ésima, con  $r \neq s$ , entonces  $D(B) = -D(A)$ .

- 6) Si  $A \in M_n(K)$  y  $B$  es la matriz que resulta de sumarle a la columna  $s$ -ésima de  $A$  la  $r$ -ésima multiplicada por el escalar  $a \in K$ , con  $1 \leq r \neq s \leq n$ , entonces  $D(B) = D(A)$ .

DEMOSTRACIÓN.

- 1) Es consecuencia de la  $n$ -linealidad de  $F_D$ .
- 2) Es consecuencia de la  $n$ -linealidad de  $F_D$ .
- 3) Es consecuencia de que  $F_D$  es alternada.
- 4) Es consecuencia del primer apartado de 1.2.
- 5) Es consecuencia del segundo apartado de 1.2.
- 6) Si  $c_j$ , para  $1 \leq j \leq n$ , representa la columna  $j$ -ésima de  $A$ , entonces, haciendo uso de que  $F_D$  es  $n$ -lineal y alternada, y suponiendo  $r < s$  (para  $r > s$  es análogo), se tiene:

$$\begin{aligned} D(B) &= F_D(c_1, \dots, c_r, \dots, c_s + ac_r, \dots, c_n) = \\ &= F_D(c_1, \dots, c_r, \dots, c_s, \dots, c_n) + a F_D(c_1, \dots, c_r, \dots, c_r, \dots, c_n) = \\ &= F_D(c_1, \dots, c_r, \dots, c_s, \dots, c_n) = D(A) \end{aligned}$$

□

**Nota 1.5.** Si  $D$  es una función determinante en  $M_n(K)$ , las consecuencias 1) y 2) de 1.4 las expresaremos diciendo que  $D$  es  $n$ -lineal respecto a las columnas. Asimismo, la consecuencia 3) de 1.4 la expresaremos diciendo que  $D$  es alternada respecto a las columnas.

**Nota 1.6.** En la práctica 2 del capítulo 1, vimos cómo afecta a una matriz el hecho de postmultiplicarla por una matriz elemental, en particular, si  $A \in M_n(K)$ , se verifica:

- 1) La matriz  $A E^r(a)$  es la matriz que resulta de multiplicar la columna  $r$ -ésima de  $A$  por el escalar no nulo  $a$ .
- 2) La matriz  $A E_s^r(a)$  es la matriz que resulta de sumarle a la columna  $s$ -ésima de  $A$ , la columna  $r$ -ésima multiplicada por  $a$ .
- 3) La matriz  $A E^{r,s}$  es la matriz que resulta de permutar las columnas  $r$ -ésima y  $s$ -ésima de  $A$ .

Vimos asimismo que la traspuesta de una matriz elemental es también matriz elemental y en particular se cumple:

$$(E^r(a))^T = E^r(a) \quad ; \quad (E^{r,s})^T = E^{r,s} \quad ; \quad (E_s^r(a))^T = E_r^s(a)$$

**Proposición 1.7.** Sea  $D$  una función determinante en  $M_n(K)$  y sean  $A$  y  $E$  matrices de  $M_n(K)$ , con  $E$  matriz elemental, entonces:

- 1) Si  $E = E^r(a)$ , se tiene 
$$\begin{cases} D(A E^r(a)) = a D(A). \\ D(E^r(a)) = a. \\ D((E^r(a))^T) = D(E^r(a)) = a \neq 0. \end{cases}$$
- 2) Si  $E = E^{r,s}$ , se tiene 
$$\begin{cases} D(A E^{r,s}) = -D(A). \\ D(E^{r,s}) = -1. \\ D((E^{r,s})^T) = D(E^{r,s}) = -1 \neq 0. \end{cases}$$
- 3) Si  $E = E_s^r(a)$ , se tiene 
$$\begin{cases} D(A E_s^r(a)) = D(A). \\ D(E_s^r(a)) = 1. \\ D((E_s^r(a))^T) = D(E_s^r(a)) = 1 \neq 0. \end{cases}$$

Además,  $D(AE) = D(A)D(E)$ .

DEMOSTRACIÓN.

- 1) 
$$\begin{cases} D(A E^r(a)) = a D(A) : \text{Es consecuencia de la nota 1.6 y del apartado 1) de 1.4.} \\ D(E^r(a)) = a : \text{Es consecuencia del apartado anterior para } A = I_n. \\ D((E^r(a))^T) = D(E^r(a)) = a \neq 0 : \text{Es consecuencia del apartado anterior} \\ \text{y de que } (E^r(a))^T = E^r(a). \end{cases}$$
- 2) 
$$\begin{cases} D(A E^{r,s}) = -D(A) : \text{Es consecuencia de la nota 1.6 y del apartado 5) de 1.4.} \\ D(E^{r,s}) = -1 : \text{Es consecuencia del apartado anterior para } A = I_n. \\ D((E^{r,s})^T) = D(E^{r,s}) = -1 \neq 0 : \text{Es consecuencia del apartado anterior} \\ \text{y de que } (E^{r,s})^T = E^{r,s}. \end{cases}$$
- 3) 
$$\begin{cases} D(A E_s^r(a)) = D(A) : \text{Es consecuencia de la nota 1.6 y del apartado 6) de 1.4.} \\ D(E_s^r(a)) = 1 : \text{Es consecuencia del apartado anterior para } A = I_n. \\ D((E_s^r(a))^T) = D(E_s^r(a)) = 1 \neq 0 : \text{Es consecuencia del apartado anterior} \\ \text{y de que } (E_s^r(a))^T = E_s^r(a). \end{cases}$$

Como consecuencia de las dos primeras afirmaciones de cada apartado, se deduce finalmente que  $D(AE) = D(A)D(E)$ . □

**Corolario** 1.8. Sea  $D$  una función determinante en  $M_n(K)$  y  $E_1, E_2, \dots, E_t \in M_n(K)$  matrices elementales, entonces:

- 1)  $\forall A \in M_n(K)$ , se tiene  $D(AE_1E_2 \cdots E_t) = D(A)D(E_1)D(E_2) \cdots D(E_t)$ .
- 2)  $D(E_1E_2 \cdots E_t) = D(E_1)D(E_2) \cdots D(E_t)$ .

DEMOSTRACIÓN. Para justificar el primer apartado basta aplicar repetidas veces la proposición anterior, 1.7. El apartado segundo se obtiene del primero para la matriz  $A = I_n$ .  $\square$

**Proposición 1.9.** Sea  $D$  una función determinante en  $M_n(K)$  y sea  $A \in M_n(K)$ , entonces:

$$A \text{ es inversible} \iff D(A) \neq 0$$

DEMOSTRACIÓN. Si suponemos en primer lugar que  $A$  es inversible, de acuerdo con una caracterización vista en el capítulo 1,  $A$  es producto de matrices elementales, es decir, existen matrices elementales  $E_1, E_2, \dots, E_t \in M_n(K)$  de manera que  $A = E_1 E_2 \cdots E_t$ , entonces, haciendo uso de la proposición 1.7, página 47, así como del corolario anterior, 1.8, se tiene:

$$D(A) = D(E_1 E_2 \cdots E_t) = D(E_1) D(E_2) \cdots D(E_t) \neq 0$$

Si suponemos ahora que  $A$  no es inversible, pretendemos justificar que necesariamente  $D(A) = 0$ . Sabemos que si  $A$  no es inversible, su traspuesta,  $A^T$ , tampoco lo es y, de acuerdo con una caracterización de matrices inversibles, vista en el capítulo 1,  $rg A^T < n$  y la forma escalonada reducida de  $A^T$  tendrá por consiguiente alguna fila toda de ceros. Si suponemos  $Fer(A^T) = R$ , necesariamente  $R$  tiene alguna fila formada toda de ceros y por tanto su traspuesta,  $R^T$ , tendrá alguna columna formada toda de ceros, por lo que  $D(R^T) = 0$ . Por otro lado, de  $Fer(A^T) = R$ , se tiene que existirán matrices elementales  $E_1, E_2, \dots, E_t \in M_n(K)$  de manera que  $R = E_1 E_2 \cdots E_t A^T$  y de aquí  $R^T = A E_t^T \cdots E_2^T E_1^T$ , y haciendo uso de 1.8 y 1.7, se tiene:

$$0 = D(R^T) = D(A E_t^T \cdots E_2^T E_1^T) = D(A) D(E_t^T) \cdots D(E_2^T) D(E_1^T) = D(A) D(E_t) \cdots D(E_2) D(E_1)$$

y, puesto que si  $E$  es una matriz elemental, entonces  $D(E) \neq 0$ , de la igualdad anterior se deduce que  $D(A) = 0$ .  $\square$

**Proposición 1.10.** Si  $D$  es una función determinante en  $M_n(K)$ , entonces  $\forall A \in M_n(K)$  se verifica que  $D(A) = D(A^T)$ .

DEMOSTRACIÓN. Distinguiremos los dos casos siguientes:

- Si  $A$  es inversible, sabemos que es producto de matrices elementales, es decir, existen matrices elementales  $E_1, E_2, \dots, E_t \in M_n(K)$  de manera que  $A = E_1 E_2 \cdots E_t$ . Obviamente se tiene  $A^T = E_t^T \cdots E_2^T E_1^T$  y, haciendo uso de 1.8, página 48, y del hecho de que para toda matriz elemental  $E$  se verifica  $D(E^T) = D(E)$ , se tiene:

$$D(A) = D(E_1 E_2 \cdots E_t) = D(E_1) D(E_2) \cdots D(E_t) = D(E_1^T) D(E_2^T) \cdots D(E_t^T) =$$

$$= D(E_t^T) \cdots D(E_2^T) D(E_1^T) = D(E_t^T \cdots E_2^T E_1^T) = D(A^T)$$

- Si  $A$  no es inversible, sabemos que  $A^T$  tampoco lo es y de la proposición anterior, 1.9, se tiene  $D(A) = 0 = D(A^T)$ .

□

**Nota** 1.11. Si  $D$  es una función determinante en  $M_n(K)$ , puesto que acabamos de comprobar que  $D(A) = D(A^T) \forall A \in M_n(K)$ , las consecuencias vistas en 1.4, página 46, se verifican también si cambiamos el término *columna* por el de *fila*. En particular, en la línea de la nota 1.5, página 47, diremos también que  $D$  es  $n$ -lineal y alternada respecto a las filas.

**Proposición** 1.12. Si  $D$  es una función determinante en  $M_n(K)$ , entonces  $\forall A, B \in M_n(K)$  se verifica que  $D(AB) = D(A)D(B)$ .

DEMOSTRACIÓN. Distinguiremos los dos casos siguientes:

- Si  $B$  es inversible, entonces  $B$  es producto de matrices elementales, es decir, existen matrices elementales  $E_1, E_2, \dots, E_t \in M_n(K)$  de manera que  $B = E_1 E_2 \cdots E_t$ . Entonces, haciendo uso de 1.8, página 48, se tiene:

$$D(AB) = D(AE_1 E_2 \cdots E_t) = D(A)D(E_1)D(E_2) \cdots D(E_t) = D(A)D(B)$$

- Si  $B$  no es inversible, entonces  $AB$  tampoco lo es ya que si lo fuese, existiría  $(AB)^{-1} \in M_n(K)$  tal que  $(AB)^{-1}AB = I_n = AB(AB)^{-1}$ , pero, haciendo uso de una propiedad vista al final del capítulo 1, de la igualdad  $(AB)^{-1}AB = I_n$  se tendría  $B$  inversible, en contra de nuestra hipótesis. Finalmente, de acuerdo con la proposición 1.9, página 49, se tiene  $D(B) = 0$  y  $D(AB) = 0$ , por lo que  $D(AB) = 0 = D(A)D(B)$ .

□

**Proposición** 1.13. (*Unicidad*) Si  $D$  y  $D'$  son funciones determinante en  $M_n(K)$ , entonces  $D = D'$ .

DEMOSTRACIÓN. Puesto que  $D$  y  $D'$  son aplicaciones de  $M_n(K)$  en  $K$ , para justificar la igualdad  $D = D'$ , hemos de ver que ambas aplicaciones dan la misma imagen sobre cualquier matriz  $A \in M_n(K)$ . Distinguiremos los dos casos siguientes:

- Si  $A$  es inversible, entonces  $A$  es producto de matrices elementales, es decir, existen matrices elementales  $E_1, E_2, \dots, E_t \in M_n(K)$  de manera que  $A = E_1 E_2 \cdots E_t$ . Por tanto, haciendo uso, para  $D$  y para  $D'$ , de 1.8 y de 1.7, páginas 48 y 47 respectivamente, se tiene:

$$D(A) = D(E_1 E_2 \cdots E_t) = D(E_1)D(E_2) \cdots D(E_t) = D'(E_1)D'(E_2) \cdots D'(E_t) = D'(A)$$

- Si  $A$  no es inversible, entonces, haciendo uso de 1.9, página 49, para  $D$  y para  $D'$ , se tiene  $D(A) = 0 = D'(A)$ .

□

## 2. Fórmula de Laplace

**Definición 2.1.** Si  $A \in M_n(K)$ , con  $n > 1$ , representaremos por  $A_s^r$ , con  $1 \leq r, s \leq n$ , a la matriz que resulta de eliminar en  $A$  la fila  $r$ -ésima y la columna  $s$ -ésima, es decir, si  $A = [a_j^i]_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$ , entonces:

$$A_s^r = \begin{bmatrix} a_1^1 & \cdots & a_{s-1}^1 & a_{s+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{r-1} & \cdots & a_{s-1}^{r-1} & a_{s+1}^{r-1} & \cdots & a_n^{r-1} \\ a_1^{r+1} & \cdots & a_{s-1}^{r+1} & a_{s+1}^{r+1} & \cdots & a_n^{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_{s-1}^n & a_{s+1}^n & \cdots & a_n^n \end{bmatrix} \in M_{n-1}(K)$$

**Proposición 2.2.** Si  $D$  es una función determinante en  $M_{n-1}(K)$ , con  $n > 1$ , entonces para todo  $r$  y todo  $s$ , con  $1 \leq r, s \leq n$ , se tiene que las aplicaciones  $D^r : M_n(K) \longrightarrow K$  y  $D_s : M_n(K) \longrightarrow K$ , definidas a continuación, son funciones determinante en  $M_n(K)$ :

$$\forall A = [a_j^i]_{1 \leq i, j \leq n} \begin{cases} D^r(A) = (-1)^{r+1} a_1^r D(A_1^r) + (-1)^{r+2} a_2^r D(A_2^r) + \cdots + (-1)^{r+n} a_n^r D(A_n^r) \\ D_s(A) = (-1)^{1+s} a_s^1 D(A_s^1) + (-1)^{2+s} a_s^2 D(A_s^2) + \cdots + (-1)^{n+s} a_s^n D(A_s^n) \end{cases}$$

Además se tiene que:

$$D^1 = D^2 = \cdots = D^n = D_1 = D_2 = \cdots = D_n$$

DEMOSTRACIÓN. Para hacer la demostración seguiremos los pasos siguientes:

- I)**  $D^r$ , para  $1 \leq r \leq n$ , es una función determinante en  $M_n(K)$ .
- II)**  $D^1 = D^2 = \cdots = D^n$ .
- III)**  $D^r = D_r$ , para  $1 \leq r \leq n$ , y por consiguiente  $D_r$  es también función determinante y se tienen las igualdades  $D^1 = D^2 = \cdots = D^n = D_1 = D_2 = \cdots = D_n$  buscadas.

**I)** Para demostrar que  $D^r$ , para  $1 \leq r \leq n$ , es una función determinante en  $M_n(K)$ , de acuerdo con la definición 1.3, página 46, hemos de justificar que  $D^r(I_n) = 1$  y que la correspondiente aplicación  $F_{D^r}$  es  $n$ -lineal y alternada. En efecto:

- Teniendo en cuenta que el único término no nulo de la fila  $r$ -ésima de  $I_n$  es el de la columna  $r$ -ésima, además este término es 1, y que  $(I_n)_r^r = I_{n-1}$  y  $D(I_{n-1}) = 1$ , se tiene:

$$D^r(I_n) = (-1)^{r+r} 1 D((I_n)_r^r) = (-1)^{2r} D(I_{n-1}) = 1$$

- Pretendemos justificar la igualdad  $F_{D^r}(c_1, \dots, \alpha c_j, \dots, c_n) = \alpha F_{D^r}(c_1, \dots, c_j, \dots, c_n)$ . Supongamos que  $A = [a_j^i]_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$  es la matriz cuyas columnas son  $(c_1, \dots, c_j, \dots, c_n)$  y  $B$  es la matriz de  $M_n(K)$  cuyas columnas son  $(c_1, \dots, \alpha c_j, \dots, c_n)$ , entonces:

$$\begin{aligned} F_{D^r}(c_1, \dots, \alpha c_j, \dots, c_n) &= D^r(B) = D^r \left( \begin{bmatrix} a_1^1 & \dots & a_{j-1}^1 & \alpha a_j^1 & a_{j+1}^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \dots & a_{j-1}^r & \alpha a_j^r & a_{j+1}^r & \dots & a_n^r \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_{j-1}^n & \alpha a_j^n & a_{j+1}^n & \dots & a_n^n \end{bmatrix} \right) = \\ &= (-1)^{r+1} a_1^r D(B_1^r) + \dots + (-1)^{r+j} \alpha a_j^r D(B_j^r) + \dots + (-1)^{r+n} a_n^r D(B_n^r) \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que  $B_j^r = A_j^r$  y que, para todo  $i \neq j$  se tiene  $D(B_i^r) = \alpha D(A_i^r)$  como consecuencia de que  $D$  es función determinante, entonces:

$$\begin{aligned} F_{D^r}(c_1, \dots, \alpha c_j, \dots, c_n) &= \dots = \\ &= (-1)^{r+1} a_1^r \alpha D(A_1^r) + \dots + (-1)^{r+j} \alpha a_j^r D(A_j^r) + \dots + (-1)^{r+n} a_n^r \alpha D(A_n^r) = \\ &= \alpha \left( (-1)^{r+1} a_1^r D(A_1^r) + \dots + (-1)^{r+j} a_j^r D(A_j^r) + \dots + (-1)^{r+n} a_n^r D(A_n^r) \right) = \\ &= \alpha D^r(A) = \alpha F_{D^r}(c_1, \dots, c_j, \dots, c_n) \end{aligned}$$

- Pretendemos justificar ahora la igualdad:

$$F_{D^r}(c_1, \dots, c_j + c'_j, \dots, c_n) = F_{D^r}(c_1, \dots, c_j, \dots, c_n) + F_{D^r}(c_1, \dots, c'_j, \dots, c_n)$$

Supongamos que  $A = [a_j^i]_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$  es la matriz cuyas columnas son  $(c_1, \dots, c_j, \dots, c_n)$ ,  $A'$  es la matriz de  $M_n(K)$  cuyas columnas son  $(c_1, \dots, c'_j, \dots, c_n)$ , es decir, todas sus columnas

coinciden con las de  $A$  excepto la  $j$ -ésima que corresponde a la matriz columna  $c'_j = \begin{bmatrix} a_j'^1 \\ a_j'^2 \\ \vdots \\ a_j'^n \end{bmatrix}$  y

supongamos que  $B$  es la matriz de  $M_n(K)$  cuyas columnas son  $(c_1, \dots, c_j + c'_j, \dots, c_n)$ , entonces:

$$F_{D^r}(c_1, \dots, c_j + c'_j, \dots, c_n) = D^r(B) =$$



$$= D^r \left( \begin{bmatrix} a_1^1 & \dots & a_{j-1}^1 & a_j^1 + a_j'^1 & a_{j+1}^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \dots & a_{j-1}^r & a_j^r + a_j'^r & a_{j+1}^r & \dots & a_n^r \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_{j-1}^n & a_j^n + a_j'^n & a_{j+1}^n & \dots & a_n^n \end{bmatrix} \right) =$$

$$= (-1)^{r+1} a_1^r D(B_1^r) + \dots + (-1)^{r+j} (a_j^r + a_j'^r) D(B_j^r) + \dots + (-1)^{r+n} a_n^r D(B_n^r)$$

y teniendo en cuenta que  $B_j^r = A_j^r = A_j'^r$  y que  $D(B_i^r) = D(A_i^r) + D(A_i'^r)$  para todo  $i \neq j$ , como consecuencia de que  $D$  es función determinante, entonces:

$$\begin{aligned} F_{D^r}(c_1, \dots, c_j + c_j', \dots, c_n) &= \dots = \\ &= (-1)^{r+1} a_1^r (D(A_1^r) + D(A_1'^r)) + \dots + (-1)^{r+j} (a_j^r + a_j'^r) D(B_j^r) + \\ &\quad + \dots + (-1)^{r+n} a_n^r (D(A_n^r) + D(A_n'^r)) = \\ &= (-1)^{r+1} a_1^r D(A_1^r) + \dots + (-1)^{r+j} a_j^r D(A_j^r) + \dots + (-1)^{r+n} a_n^r D(A_n^r) + \\ &\quad + (-1)^{r+1} a_1'^r D(A_1'^r) + \dots + (-1)^{r+j} a_j'^r D(A_j'^r) + \dots + (-1)^{r+n} a_n'^r D(A_n'^r) = \\ &= D^r(A) + D^r(A') = F_{D^r}(c_1, \dots, c_j, \dots, c_n) + F_{D^r}(c_1, \dots, c_j', \dots, c_n) \end{aligned}$$

- Pretendemos ahora justificar que si para algún  $i \neq j$  (supondremos  $i < j$ ), se tiene  $c_i = c_j$ , entonces:

$$F_{D^r}(c_1, \dots, c_i, \dots, c_j, \dots, c_n) = 0$$

Supongamos que  $A = [a_j^i]_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$  es la matriz cuyas columnas son

$$(c_1, \dots, c_i, \dots, c_j, \dots, c_n)$$

entonces tenemos:

$$\begin{aligned} F_{D^r}(c_1, \dots, c_i, \dots, c_j, \dots, c_n) &= D^r(A) = D^r \left( \begin{bmatrix} a_1^1 & \dots & a_i^1 & \dots & a_j^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \dots & a_i^r & \dots & a_j^r & \dots & a_n^r \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_i^n & \dots & a_j^n & \dots & a_n^n \end{bmatrix} \right) = \\ &= (-1)^{r+1} a_1^r D(A_1^r) + \dots + (-1)^{r+i} a_i^r D(A_i^r) + \dots + \\ &\quad + (-1)^{r+j} a_j^r D(A_j^r) + \dots + (-1)^{r+n} a_n^r D(A_n^r) \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que, para todo  $k$ , con  $i \neq k \neq j$ , se tiene que  $A_k^r$  tiene dos columnas iguales y que  $D$  es función determinante, tenemos  $D(A_k^r) = 0$  y por tanto:

$$F_{D^r}(c_1, \dots, c_i, \dots, c_j, \dots, c_n) = \dots = (-1)^{r+i} a_i^r D(A_i^r) + (-1)^{r+j} a_j^r D(A_j^r)$$

Por otro lado, puesto que  $c_i = c_j$ , las matrices  $A_i^r$  y  $A_j^r$  tienen las mismas columnas salvo que éstas están en ordenaciones distintas, es decir:

$$A_i^r = \begin{bmatrix} a_1^1 & \dots & a_{i-1}^1 & a_{i+1}^1 & \dots & a_j^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{r-1} & \dots & a_{i-1}^{r-1} & a_{i+1}^{r-1} & \dots & a_j^{r-1} & \dots & a_n^{r-1} \\ a_1^{r+1} & \dots & a_{i-1}^{r+1} & a_{i+1}^{r+1} & \dots & a_j^{r+1} & \dots & a_n^{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_{i-1}^n & a_{i+1}^n & \dots & a_j^n & \dots & a_n^n \end{bmatrix}$$

$$A_j^r = \begin{bmatrix} a_1^1 & \dots & a_i^1 & \dots & a_{j-1}^1 & a_{j+1}^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{r-1} & \dots & a_i^{r-1} & \dots & a_{j-1}^{r-1} & a_{j+1}^{r-1} & \dots & a_n^{r-1} \\ a_1^{r+1} & \dots & a_i^{r+1} & \dots & a_{j-1}^{r+1} & a_{j+1}^{r+1} & \dots & a_n^{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_i^n & \dots & a_{j-1}^n & a_{j+1}^n & \dots & a_n^n \end{bmatrix}$$

Notemos que podemos obtener  $A_i^r$ , a partir de  $A_j^r$ , realizando la siguiente secuencia de intercambio de columnas:

- Permutando la columna  $i$ -ésima y la  $(i+1)$ -ésima.
- Permutando la columna  $(i+1)$ -ésima y la  $(i+2)$ -ésima.
- .....
- Permutando la columna  $(j-2)$ -ésima y la  $(j-1)$ -ésima.

Por consiguiente tenemos:

$$A_i^r = A_j^r E^{i,i+1} E^{i+1,i+2} \dots E^{j-2,j-1}$$

y puesto que  $D$  es función determinante, se tiene:

$$\begin{aligned} D(A_i^r) &= D(A_j^r E^{i,i+1} E^{i+1,i+2} \dots E^{j-2,j-1}) = \\ &= D(A_j^r) D(E^{i,i+1}) D(E^{i+1,i+2}) \dots D(E^{j-2,j-1}) \end{aligned}$$

Además, de acuerdo con lo visto en 1.7, página 47, el valor de  $D$  sobre cada una de estas matrices elementales es  $-1$ , basta contar cuántas permutaciones de columnas hemos realizado.

Es sencillo comprobar que hemos realizado exactamente  $j - i - 1$  permutaciones de columna y en consecuencia tenemos:

$$D(A_i^r) = D(A_j^r)(-1)^{j-i-1}$$

y de aquí, teniendo también en cuenta que  $a_i^r = a_j^r$ , tenemos:

$$\begin{aligned} F_{D^r}(c_1, \dots, c_i, \dots, c_j, \dots, c_n) &= (-1)^{r+i} a_i^r D(A_i^r) + (-1)^{r+j} a_j^r D(A_j^r) = \\ &= (-1)^{r+i} a_i^r D(A_j^r)(-1)^{j-i-1} + (-1)^{r+j} a_j^r D(A_j^r) = \\ &= (-1)^{r+i+j-i-1} a_j^r D(A_j^r) + (-1)^{r+j} a_j^r D(A_j^r) = \\ &= \left( (-1)^{r+j-1} + (-1)^{r+j} \right) a_j^r D(A_j^r) = 0 \end{aligned}$$

**II)**  $D^1 = D^2 = \dots = D^n$  es consecuencia de que todas éstas son funciones determinante en  $M_n(K)$  y de la unicidad vista en 1.13, página 50.

**III)** Para demostrar que  $D^r = D_r$ , para  $1 \leq r \leq n$ , de acuerdo con la definición de  $D_r$ , tenemos que si  $A = [a_j^i]_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$ , entonces:

$$D_r(A) = (-1)^{1+r} a_r^1 D(A_r^1) + (-1)^{2+r} a_r^2 D(A_r^2) + \dots + (-1)^{n+r} a_r^n D(A_r^n)$$

Por otro lado, si consideramos  $B = A^T = [b_j^i]_{1 \leq i, j \leq n}$ , se tiene  $b_j^i = a_i^j$  y:

$$(A_r^1)^T = B_1^r \quad (A_r^2)^T = B_2^r \quad \dots \quad (A_r^n)^T = B_n^r$$

y de aquí, haciendo uso de que  $D$  es función determinante, para todo  $i$ , con  $1 \leq i \leq n$ , se tiene que  $D(A_r^i) = D((A_r^i)^T) = D(B_i^r)$ , de donde:

$$\begin{aligned} D_r(A) &= (-1)^{1+r} a_r^1 D(A_r^1) + (-1)^{2+r} a_r^2 D(A_r^2) + \dots + (-1)^{n+r} a_r^n D(A_r^n) = \\ &= (-1)^{1+r} b_1^r D(B_1^r) + (-1)^{2+r} b_2^r D(B_2^r) + \dots + (-1)^{n+r} b_n^r D(B_n^r) = D^r(B) = D^r(A^T) \end{aligned}$$

Pero, puesto que ya hemos comprobado que  $D^r$  es función determinante, de la proposición 1.10, página 49, tenemos:

$$D_r(A) = \dots = D^r(A^T) = D^r(A)$$

Con esto  $D_r = D^r$  para todo  $r$ , con  $1 \leq r \leq n$ , y por consiguiente  $D_r$  es función determinante en  $M_n(K)$  por serlo  $D^r$ , y además se verifican las igualdades:

$$D^1 = D^2 = \dots = D^n = D_1 = D_2 = \dots = D_n$$

□

### 3. Determinante de una matriz cuadrada

**Proposición 3.1.** Para todo  $n \geq 1$  existe una y sólo una función determinante en  $M_n(K)$ .

DEMOSTRACIÓN. Haciendo uso de la proposición 1.13, página 50, es suficiente justificar la existencia de alguna función determinante en  $M_n(K)$ , para todo  $n \geq 1$ , lo que hacemos por inducción:

- Existe alguna función determinante en  $M_1(K)$ : La aplicación  $D : M_1(K) \longrightarrow K$ , definida según  $D([a]) = a$ , es función determinante. En efecto, de acuerdo con la definición 1.3, página 46, se tiene:
  - 1)  $D([1]) = 1$ .
  - 2) En este caso, es inmediato que  $F_D = D$ , y además:
    - $D$  es 1-lineal: 
$$\begin{cases} D([a] + [b]) = D([a + b]) = a + b = D([a]) + D([b]) \\ D(a[b]) = D([ab]) = ab = aD([b]) \end{cases}$$
    - $D$  es alternada: esta condición se cumple trivialmente puesto que no se puede dar el caso de que  $D$  actúe sobre una  $n$ -tupla con al menos dos componentes iguales.
- Si existe alguna función determinante en  $M_{n-1}(K)$ , con  $n > 1$ , entonces existe en  $M_n(K)$ : Esto ha sido demostrado en la proposición 2.2, página 51.

□

**Definición 3.2.** Para todo  $n \geq 1$ , la única función determinante que existe en  $M_n(K)$  la representaremos por  $\det : M_n(K) \longrightarrow K$ , y a la imagen de una matriz  $A \in M_n(K)$  la representaremos normalmente por  $\det(A)$  o simplemente por  $|A|$  y la denominaremos *determinante de la matriz  $A$* .

**Nota 3.3.** La existencia de función determinante en  $M_n(K)$ , para  $n \geq 1$ , la hemos demostrado en 3.1 haciendo uso, básicamente, de la *Fórmula de Laplace*, no obstante, puede también justificarse a partir de contenidos que veremos en el *Tema 9*. En particular podremos comprobar que la aplicación  $D : M_n(K) \longrightarrow K$ , definida según:

$$D(A) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \text{sig}(\sigma) a_{\sigma(1)}^1 a_{\sigma(2)}^2 \cdots a_{\sigma(n)}^n$$

donde  $A = [a_{ij}^i]_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$ ,  $\Sigma_n$  es el conjunto de todas las permutaciones de  $\{1, 2, \dots, n\}$  y  $\text{sig}(\sigma)$  es lo que definiremos como *signatura* de la permutación  $\sigma$ , es una función determinante en  $M_n(K)$ .

**Corolario 3.4.** Con la notación introducida en 2.1, página 51, si  $A = [a_{ij}^i]_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$ , con  $n > 1$ , entonces para todo  $r, s$ , con  $1 \leq r, s \leq n$ , se tiene:

$$|A| = \begin{cases} (-1)^{r+1}a_1^r|A_1^r| + (-1)^{r+2}a_2^r|A_2^r| + \cdots + (-1)^{r+n}a_n^r|A_n^r| \\ (-1)^{1+s}a_s^1|A_s^1| + (-1)^{2+s}a_s^2|A_s^2| + \cdots + (-1)^{n+s}a_s^n|A_s^n| \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia inmediata de la proposición 2.2, página 51, y de la definición 3.2 de determinante de una matriz. □

**Definición 3.5.** En el corolario anterior, la primera de las expresiones de  $|A|$  se denomina *desarrollo del determinante de A por los términos de su r-ésima fila*, y la segunda de las expresiones se denomina *desarrollo del determinante de A por los términos de su s-ésima columna*.

**Ejemplos 3.6.**

1) Si  $A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{bmatrix} \in M_2(K)$ , entonces  $|A| = a_1^1a_2^2 - a_2^1a_1^2$ .

En efecto, si desarrollamos el determinante de  $A$  por los términos de la primera fila, se tiene:

$$|A| = (-1)^{1+1}a_1^1|A_1^1| + (-1)^{1+2}a_2^1|A_2^1| = a_1^1|a_2^2| - a_2^1|a_1^2| = a_1^1a_2^2 - a_2^1a_1^2$$

2) Si  $A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{bmatrix} \in M_3(K)$ , entonces  $|A| = a_1^1a_2^2a_3^3 + a_2^1a_3^2a_1^3 + a_3^1a_1^2a_2^3 - a_1^1a_3^2a_2^3 - a_2^1a_1^3a_3^2 - a_3^1a_2^3a_1^2$ . (Esta expresión se conoce como *Regla de Sarrus*)

En efecto, si desarrollamos el determinante de  $A$  por los términos de la primera fila, y haciendo uso del ejemplo 1), se tiene:

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{1+1}a_1^1|A_1^1| + (-1)^{1+2}a_2^1|A_2^1| + (-1)^{1+3}a_3^1|A_3^1| = \\ &= a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & a_3^2 \\ a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} - a_2^1 \begin{vmatrix} a_1^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_3^3 \end{vmatrix} + a_3^1 \begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 \\ a_1^3 & a_2^3 \end{vmatrix} = \\ &= a_1^1(a_2^2a_3^3 - a_3^2a_2^3) - a_2^1(a_1^2a_3^3 - a_3^2a_1^3) + a_3^1(a_1^2a_2^3 - a_2^2a_1^3) = \\ &= a_1^1a_2^2a_3^3 + a_2^1a_3^2a_1^3 + a_3^1a_1^2a_2^3 - a_1^1a_3^2a_2^3 - a_2^1a_1^3a_3^2 - a_3^1a_2^3a_1^2 \end{aligned}$$

**Proposición 3.7.** Sea  $A \in M_n(K)$ , con  $n > 1$ , entonces:

- 1) Si  $A$  admite una estructura por bloques de la forma  $A = \left[ \begin{array}{c|c} P & O \\ \hline B & Q \end{array} \right]$ , con  $P \in M_p(K)$ ,  $Q \in M_q(K)$  y  $O \in M_{p \times q}(K)$  la correspondiente matriz nula, entonces se tiene:

$$|A| = |P| |Q|$$

- 2) Si  $A$  admite una estructura por bloques de la forma  $A = \left[ \begin{array}{c|c} P & B \\ \hline O & Q \end{array} \right]$ , con  $P \in M_p(K)$ ,  $Q \in M_q(K)$  y  $O \in M_{q \times p}(K)$  la correspondiente matriz nula, entonces se tiene:

$$|A| = |P| |Q|$$

DEMOSTRACIÓN.

- 1) Haremos la demostración por inducción sobre  $p$ . Supongamos pues en primer lugar que  $p = 1$ , es decir:

$$A = \left[ \begin{array}{c|ccc} a_1^1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{array} \right]$$

entonces,  $P = [a_1^1]$ ,  $Q = A_1^1$  y, haciendo el desarrollo del determinante de  $A$  por los términos de la primera fila, se tiene:

$$|A| = (-1)^{1+1} a_1^1 |A_1^1| = a_1^1 |Q| = |P| |Q|$$

Por hipótesis de inducción, supongamos ahora que el resultado es cierto para matrices cuadradas con una estructura por bloques como la indicada para  $A$ , pero con el bloque superior izquierda en  $M_{p-1}(K)$ , con  $p-1 \geq 1$  y justifiquemos el resultado para el caso  $P \in M_p(K)$ .

Desarrollando el determinante de  $A$  por los términos de la primera fila, y teniendo en cuenta que  $a_{p+1}^1 = \cdots = a_n^1 = 0$ , se tiene:

$$|A| = (-1)^{1+1} a_1^1 |A_1^1| + (-1)^{1+2} a_2^1 |A_2^1| + \cdots + (-1)^{1+p} a_p^1 |A_p^1|$$

Pero notemos que:

$$A_1^1 = \left[ \begin{array}{c|c} P_1^1 & O \\ \hline B_1 & Q \end{array} \right] \quad A_2^1 = \left[ \begin{array}{c|c} P_2^1 & O \\ \hline B_2 & Q \end{array} \right] \quad \cdots \quad A_p^1 = \left[ \begin{array}{c|c} P_p^1 & O \\ \hline B_p & Q \end{array} \right]$$

donde  $B_j$  es la matriz que resulta de eliminar en  $B$  la columna  $j$ , y además, las matrices  $P_1^1, P_2^1, \dots, P_p^1$  pertenecen a  $M_{p-1}(K)$  y por consiguiente es aplicable a  $A_1^1, A_2^1, \dots, A_p^1$  la

hipótesis de inducción, por lo que:

$$|A_1^1| = \left| \begin{array}{c|c} P_1^1 & O \\ \hline B_1 & Q \end{array} \right| = |P_1^1| |Q|, \quad |A_2^1| = \left| \begin{array}{c|c} P_2^1 & O \\ \hline B_2 & Q \end{array} \right| = |P_2^1| |Q|, \quad \dots, \quad |A_p^1| = \left| \begin{array}{c|c} P_p^1 & O \\ \hline B_p & Q \end{array} \right| = |P_p^1| |Q|$$

Haciendo asimismo uso del desarrollo del determinante de  $P$  por los términos de su primera fila, finalmente se tiene:

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{1+1} a_1^1 |A_1^1| + (-1)^{1+2} a_2^1 |A_2^1| + \dots + (-1)^{1+p} a_p^1 |A_p^1| = \\ &= (-1)^{1+1} a_1^1 |P_1^1| |Q| + (-1)^{1+2} a_2^1 |P_2^1| |Q| + \dots + (-1)^{1+p} a_p^1 |P_p^1| |Q| = \\ &= \left( (-1)^{1+1} a_1^1 |P_1^1| + (-1)^{1+2} a_2^1 |P_2^1| + \dots + (-1)^{1+p} a_p^1 |P_p^1| \right) |Q| = |P| |Q| \end{aligned}$$

- 2) En este caso es inmediato que  $A^T = \left[ \begin{array}{c|c} P^T & O \\ \hline B^T & Q^T \end{array} \right]$ , por lo que, haciendo uso de 1.10, página 49, y del apartado anterior, se tiene:

$$|A| = |A^T| = |P^T| |Q^T| = |P| |Q|$$

□

**Corolario 3.8.** Sea  $A = [a_j^i]_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(K)$ . En cualquiera de los casos siguientes se tiene  $|A| = a_1^1 a_2^2 \dots a_n^n$ :

- 1) Si  $A$  es *triangular inferior*, es decir  $a_j^i = 0$  siempre que  $i < j$ .
- 2) Si  $A$  es *triangular superior*, es decir  $a_j^i = 0$  siempre que  $i > j$ .
- 3) Si  $A$  es *diagonal*, es decir  $a_j^i = 0$  siempre que  $i \neq j$ .

DEMOSTRACIÓN.

- 1) Es consecuencia inmediata de aplicar repetidamente el primer apartado de la proposición anterior, 3.7.
- 2) Es consecuencia inmediata de aplicar repetidamente el segundo apartado de la proposición anterior, 3.7.
- 3) Es consecuencia inmediata de cualquiera de los apartados anteriores.

□